



Budapest Műszaki Főiskola Bánki Donát Gépész és
Biztonságtechnikai Kar

Mechatronikai és Autechnikai Intézet

Elektrotechnika

1. előadás

Összeállította: **Langer Ingrid**
főisk. adjunktus

A tárgy tematikája

- Egyen- és váltakozó áramú villamos hálózatok számítása
- Egyen- és váltakozó áramú villamos gépek

Ajánlott irodalom:

- Uray Vilmos – Szabó Szilárd: Elektrotechnika
(Nemzeti Tankönyvkiadó, Bp.)
- Kerékgyártó László: Elektrotechnika
(Nemzeti Tankönyvkiadó-Tankönyvmester Kiadó, Bp.)
- Kerékgyártó László: Elektrotechnika feladatgyűjtemény
(Nemzeti Tankönyvkiadó-Tankönyvmester Kiadó, Bp.)

Félévi követelmények:

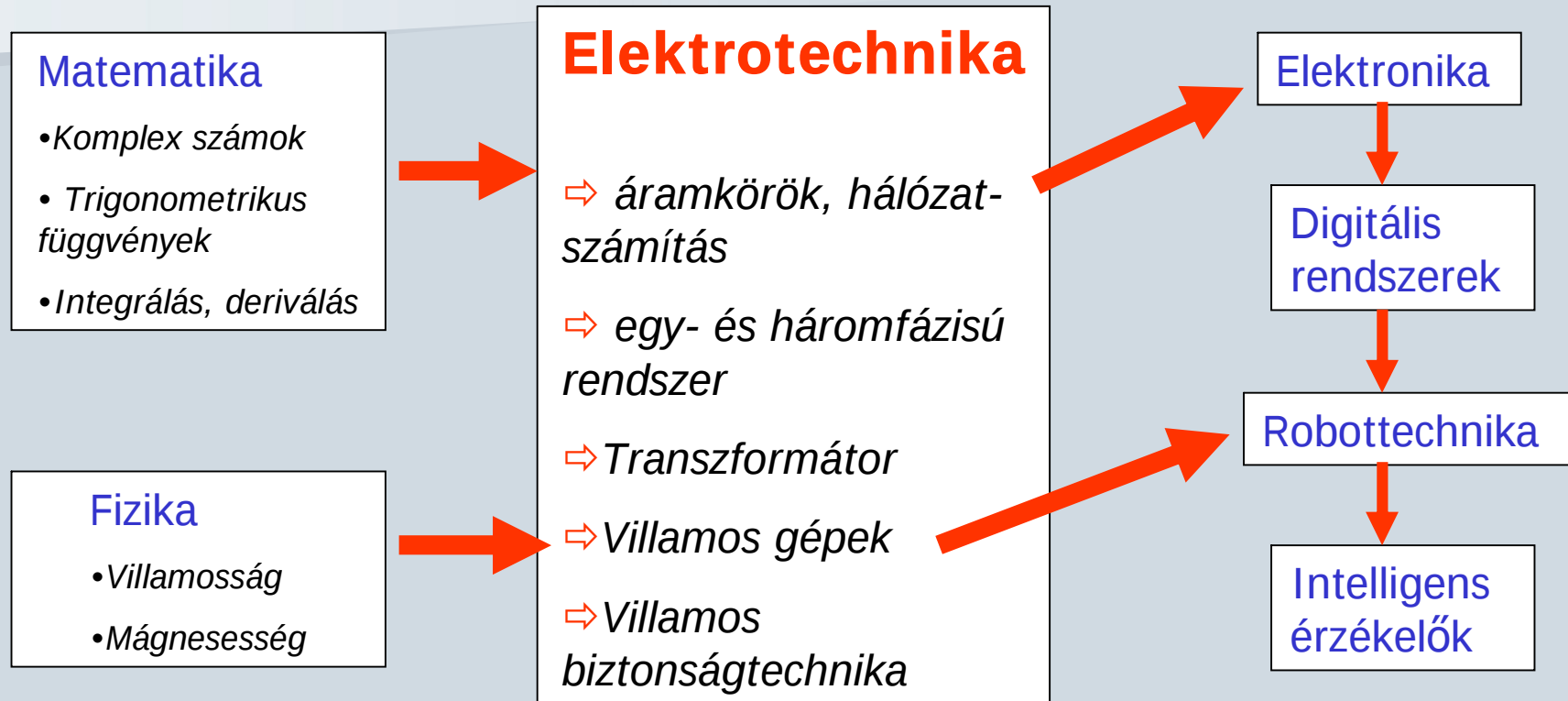
■ Aláírás megszerzése:

- 2 zárthelyi dolgozat megírása legalább **elégséges (40 %)** eredményre
- Méréseken részvétel és a **mérési jegyzőkönyvek** leadása

■ Vizsgajegy megszerzése:

- Megajánlott jegy a zárthelyikből 70% felett vagy
- **Írásbeli vizsga**

Az elektrotechnika kapcsolata más tárgyakkal:



Villamos hálózatok felépítése

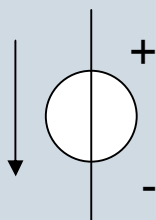
Az elemek tulajdonságai:

1. Koncentrált paraméterűek (kiterjedésük pontszerű)
2. Lineárisak (értékük feszültségtől és áramtól függetlenül állandó)
3. Invariánsak (időben állandóak)

Aktív elemek (generátorok)

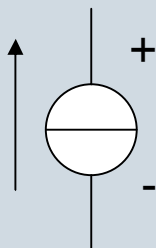
1. Ideális feszültséggenerátor

u [V]



2. Ideális áramgenerátor

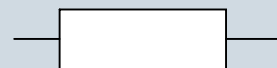
i [A]



Passzív elemek (fogyasztók)

1. Ellenállás R [Ω]

$$u = R \cdot i$$



2. Kondenzátor C [F]

$$u = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$



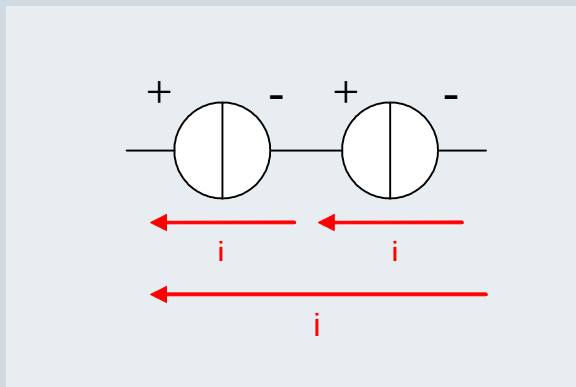
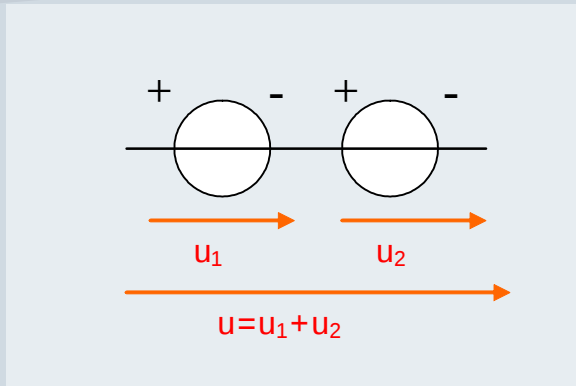
3. Tekercs L [H]

$$u = L \frac{di(t)}{dt}$$

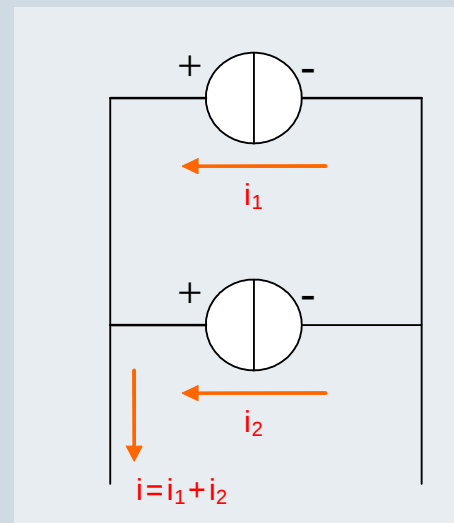
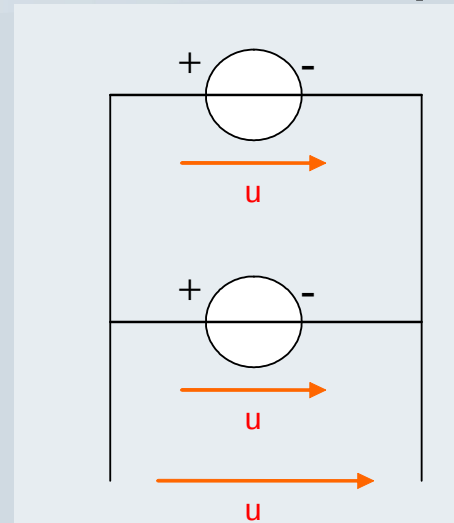


Aktív elemek eredője:

■ Soros kapcsolás

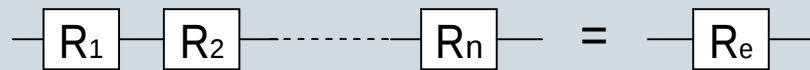


■ Párhuzamos kapcsolás



Passzív elemek eredője

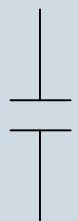
■ Soros kapcsolás



$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

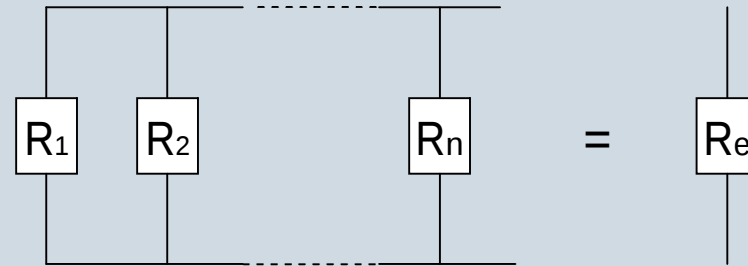


$$L_e = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$



$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

■ Párhuzamos kapcsolás



$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = R_1 \times R_1 \times \dots \times R_n$$

$$\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$$

$$C_e = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

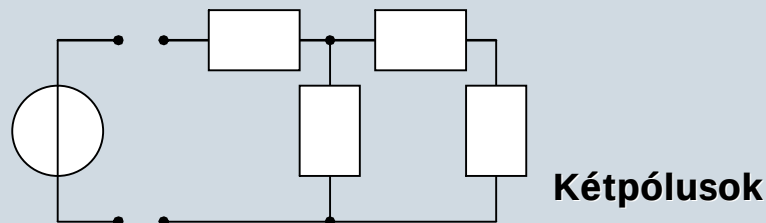
Villamos hálózatok: Több generátort vagy fogyasztót tartalmazó elágazó áramkörök

Passzív hálózat: csak fogyasztókat tartalmaz

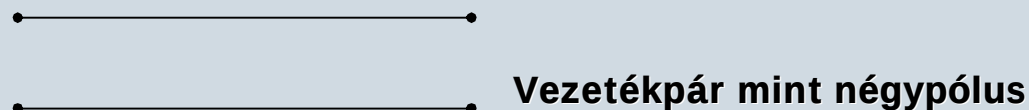
Aktív hálózat: generátor(oka)t és fogyasztókat tartalmaz

Pólusok: A villamos áramkörök vagy részáramkörök azon csatlakozópontjai, amelyekhez újabb áramköri elemet vagy részáramkört csatlakoztathatunk

Kétpólus: olyan részáramkör, amely két csatlakozóval kapcsolódhat az áramkör többi részéhez



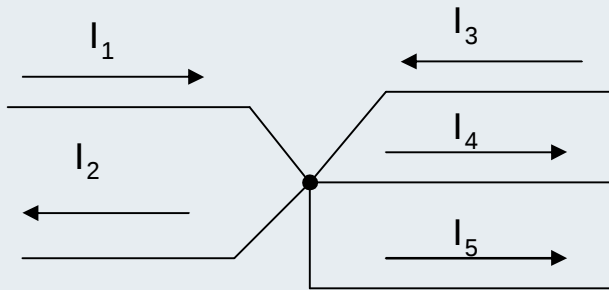
Négypólus: olyan részáramkör, amely négy csatlakozóval kapcsolódhat az áramkör többi részéhez



Kirchoff törvények

1. Csomóponti törvény

Egy villamos hálózat csomópontjába befolyó áramok összege megegyezik a csomópontból kifolyó áramok összegével.

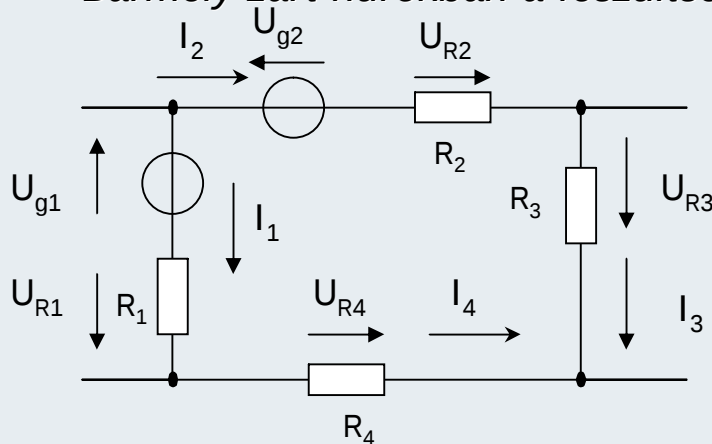


$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4 + I_5$$

$$\sum I_{\text{be}} = \sum I_{\text{ki}}$$

2. Hurok törvény

Bármely zárt hurokban a feszültségek előjeles összege nulla.



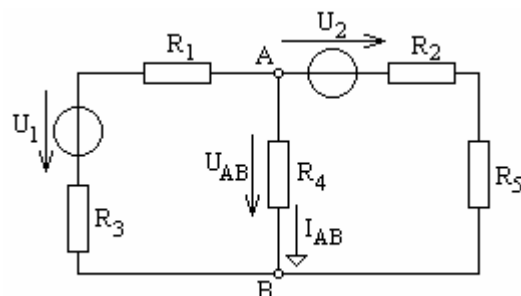
$$-U_{R1} + U_{g1} - U_{g2} + U_{R2} + U_{R3} - U_{R4} = 0$$

$$\sum U = 0$$

Példa a Kirchhoff törvények alkalmazására

1.

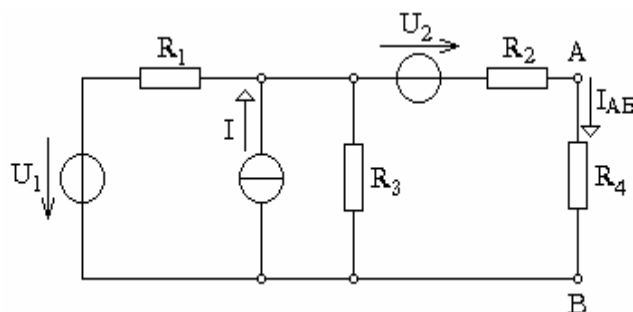
Határozza meg az ábrán látható hálózat R_4 ellenállásának áramát és feszültségét a Kirchhoff törvények felhasználásával!



$U_1 = 120 \text{ V}$
 $U_2 = 90 \text{ V}$
 $R_1 = 20$
 $R_2 = 10$
 $R_3 = 30$
 $R_4 = 50$
 $R_5 = 40$

2.

Határozza meg az ábrán látható hálózat R_4 ellenállásának áramát és feszültségét a Kirchhoff törvények felhasználásával!



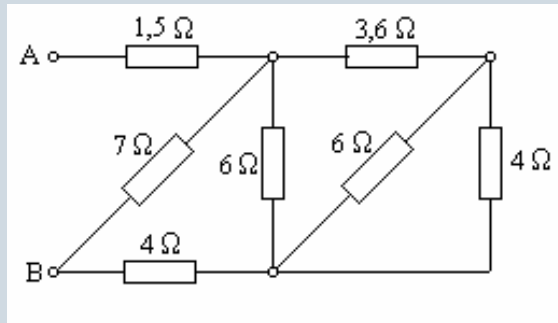
$U_1 = 120 \text{ V}$
 $U_2 = 200 \text{ V}$
 $I = 12 \text{ A}$
 $R_1 = 10$
 $R_2 = 50$
 $R_3 = 20$
 $R_4 = 30$

Passzív kétpólusú hálózatok eredő ellenállása

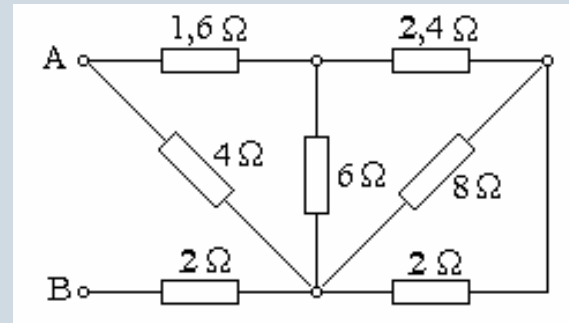
Minden kétpólusú hálózat helyettesíthető egyetlen ellenállással.

Határozzuk meg az ábrán látható ellenállás-hálózat A - B pontokra vonatkozó eredő ellenállását!

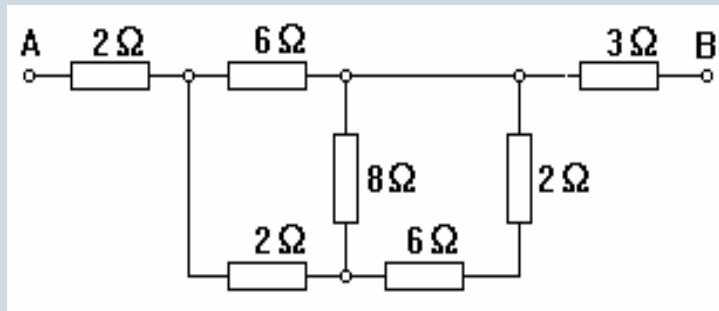
1.



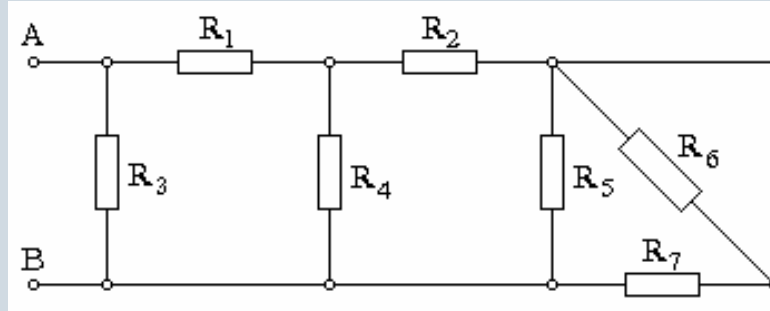
2.



3.



4.

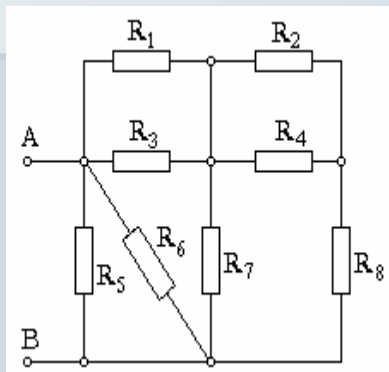


R1 = 40
R2 = 50
R3 = 80
R4 = 80
R5 = 60
R6 = 60
R7 = 60

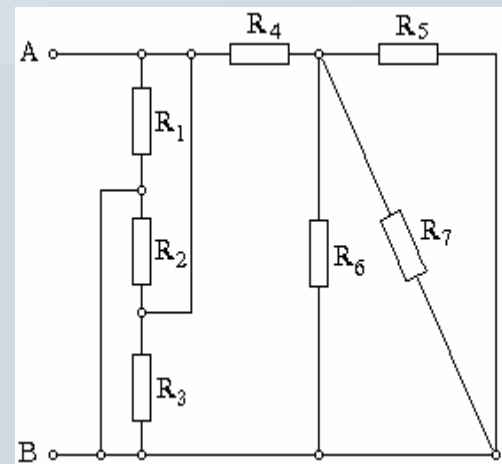
Határozzuk meg az ábra szerinti ellenállás hálózat eredő ellenállását az A - B pontok felől nézve!

5.

$R_1 = 60 \, \Omega$
 $R_2 = 30 \, \Omega$
 $R_3 = 30 \, \Omega$
 $R_4 = 20 \, \Omega$
 $R_5 = 20 \, \Omega$
 $R_6 = 40 \, \Omega$
 $R_7 = 60 \, \Omega$
 $R_8 = 18 \, \Omega$

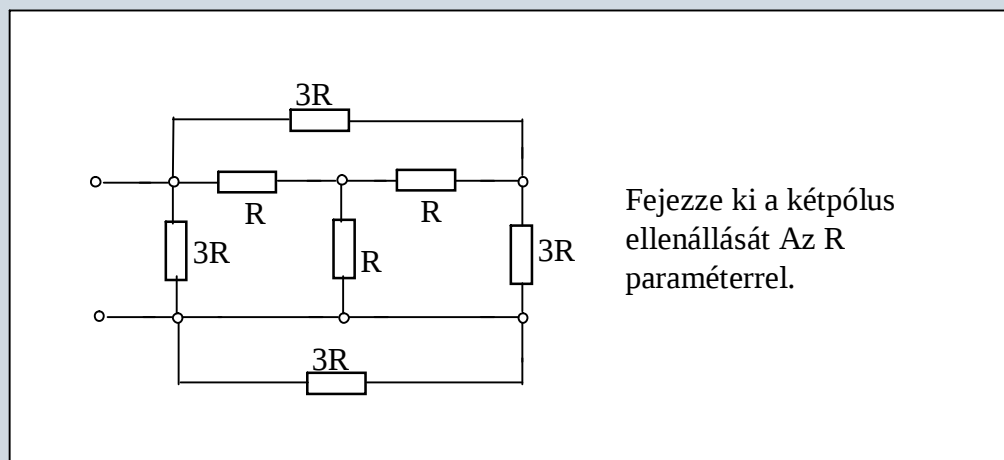


6.



$R_1 = 300 \, \Omega$
 $R_2 = 300 \, \Omega$
 $R_3 = 300 \, \Omega$
 $R_4 = 80 \, \Omega$
 $R_5 = 60 \, \Omega$
 $R_6 = 60 \, \Omega$
 $R_7 = 60 \, \Omega$

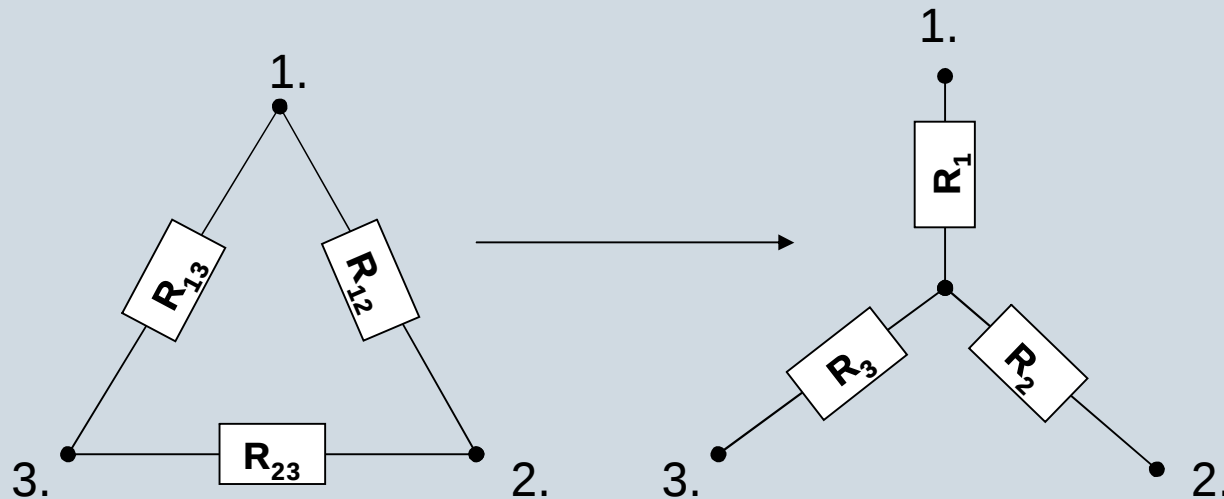
7.



Fejezze ki a kétpólus ellenállását Az R paraméterrel.

Delta-csillag átalakítás

Nem minden kapcsolás bontható fel soros és párhuzamos kapcsolások sorozatára. Ilyen esetben segítséget jelenthet a *delta-csillag* vagy a *csillag-delta* átalakítás: a hálózat egy részét kicseréljük más ellenálláskombinációra oly módon, hogy a hálózat többi részében semmi változás ne történjen. Ezt a hálózat *impedanciaháű átalakításának* nevezzük.



$$\begin{aligned} (1) \quad & R_1 + R_2 = R_{12} \times (R_{23} + R_{13}) \\ (2) \quad & R_2 + R_3 = R_{23} \times (R_{12} + R_{13}) \\ (3) \quad & R_1 + R_3 = R_{13} \times (R_{12} + R_{23}) \end{aligned}$$

$$(1) \quad R_1 + R_2 = R_{12} \times (R_{23} + R_{13})$$

$$(2) \quad R_2 + R_3 = R_{23} \times (R_{12} + R_{13})$$

$$(3) \quad R_1 + R_3 = R_{13} \times (R_{12} + R_{23})$$

$$(1) + (3) - 2 \cdot (2)$$

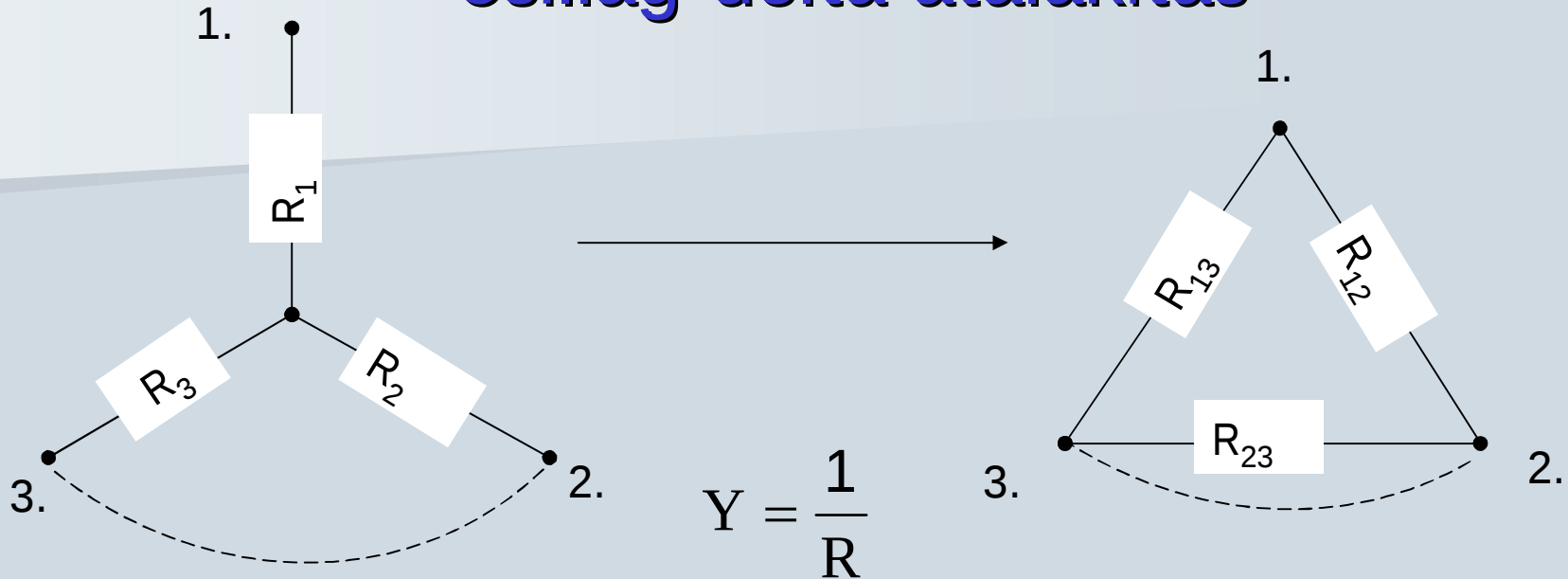
$$2 \cdot R_1 = \frac{R_{12} \cdot (R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} + \frac{R_{13} \cdot (R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} - 2 \cdot \frac{R_{23} \cdot (R_{13} + R_{12})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}},$$

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}},$$

$$R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Csillag-delta átalakítás



$$\begin{aligned} (1) \quad & Y_{12} + Y_{13} = Y_1 \times (Y_2 + Y_3) \\ (2) \quad & Y_{12} + Y_{23} = Y_2 \times (Y_1 + Y_3) \\ (3) \quad & Y_{13} + Y_{23} = Y_3 \times (Y_1 + Y_2) \end{aligned}$$

$$(1)+(2)-2 \cdot (3)$$

$$2 \cdot Y_{12} = \frac{Y_1 \cdot (Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} + \frac{Y_2 \cdot (Y_1 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} - 2 \cdot \frac{Y_3 \cdot (Y_1 + Y_2)}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

$$Y_{12} = \frac{Y_1 \cdot Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}$$

$$\frac{1}{R_{12}} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_{12}} \cdot \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3} = \frac{1}{R_1 R_2}$$

$$\frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_3} = R_{12}$$

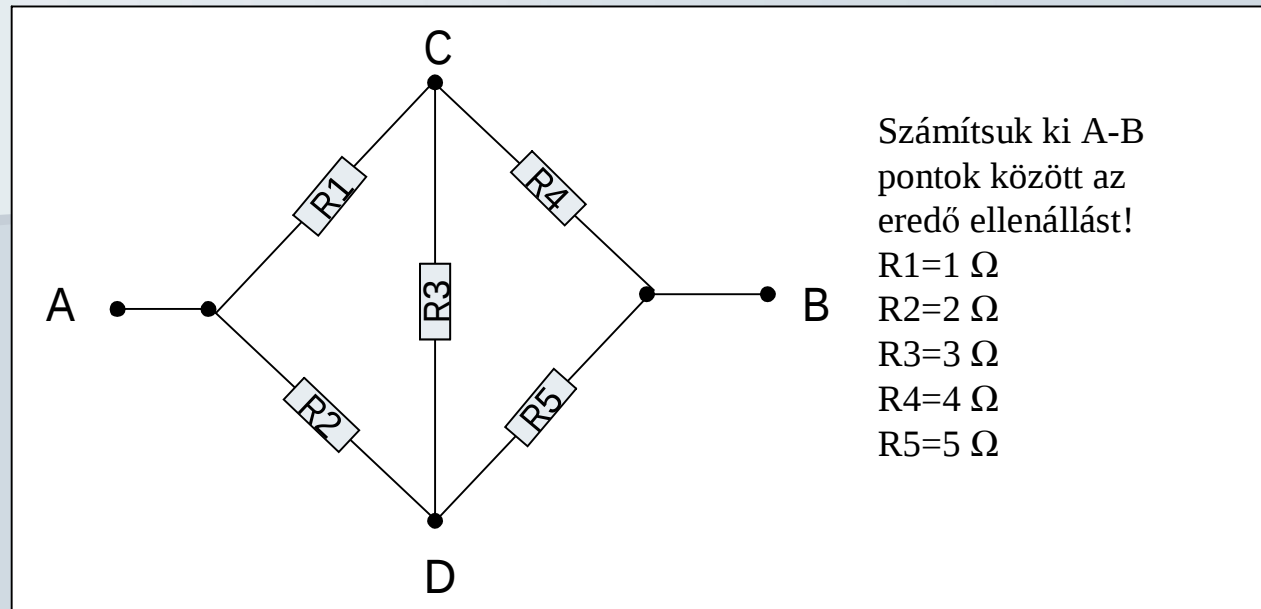
$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3},$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2},$$

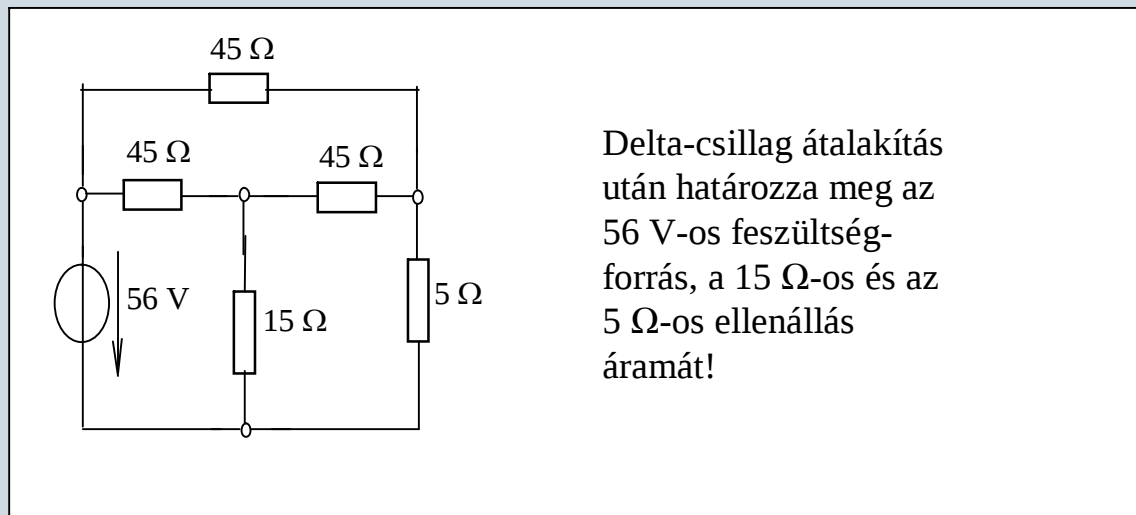
$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

Példa Δ -Y átalakításra

1.

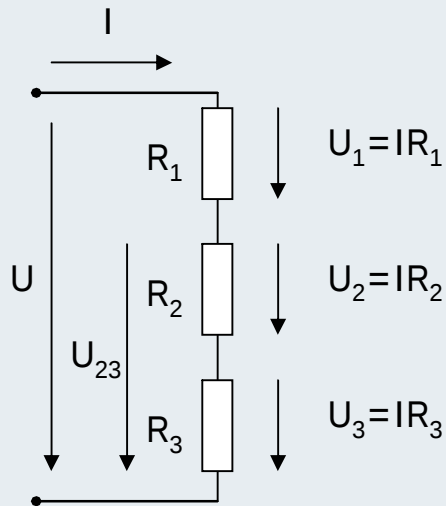


2.



Nevezetes passzív hálózatok

A feszültségosztás törvénye

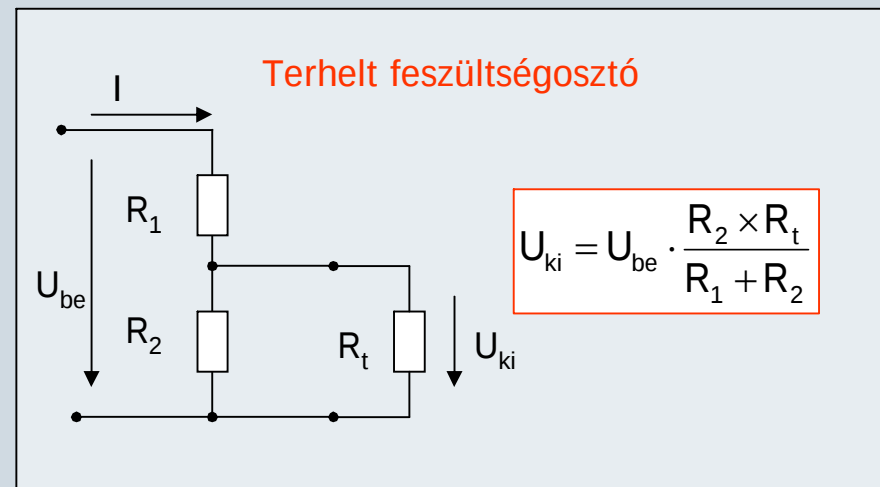
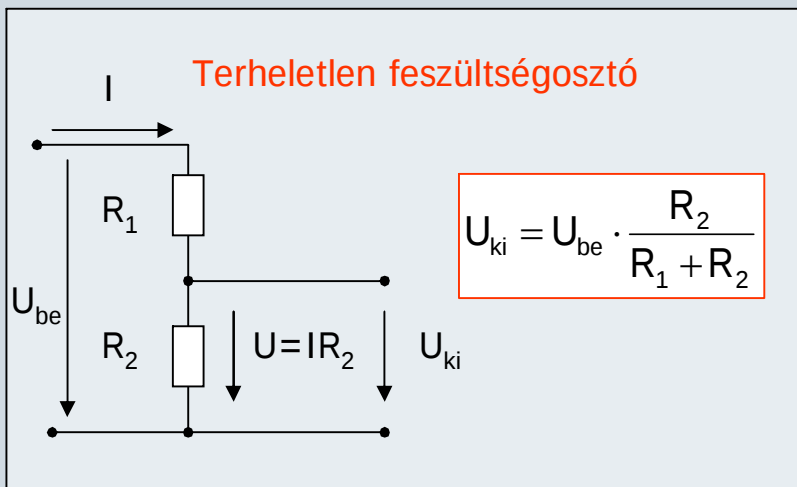


Bármely két feszültség aránya megegyezik a hozzájuk tartozó fogyasztók ellenállásainak arányával, más szóval a soros ellenálláslánc a rákapcsolt feszültséget az ellenállások arányában *leosztotta*.

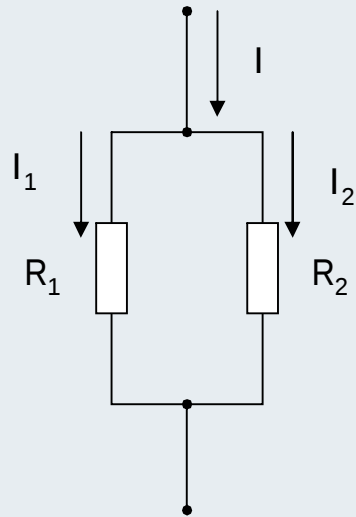
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2},$$

$$\frac{U_2}{U_3} = \frac{R_2}{R_3},$$

$$\frac{U_2}{U_{23}} = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$



Az áramosztás törvénye



Egy áramelágazás párhuzamos ágaiban folyó áramok fordítottan arányosak az ágak ellenállásaival.

$$U = I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2$$

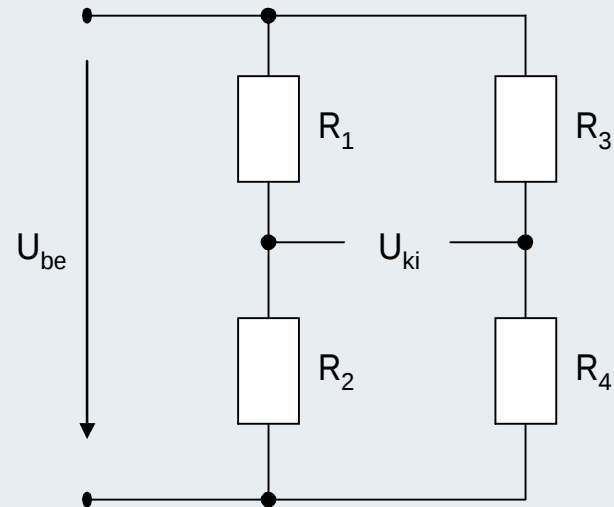
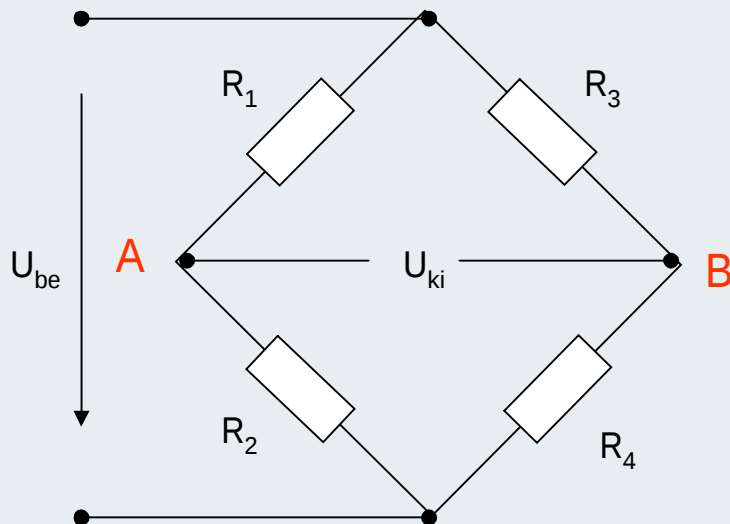
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$I = I_1 + I_2 = I_2 \cdot \frac{R_2}{R_1} + I_2 = I_2 \cdot \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) = I_2 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Wheatstone-híd



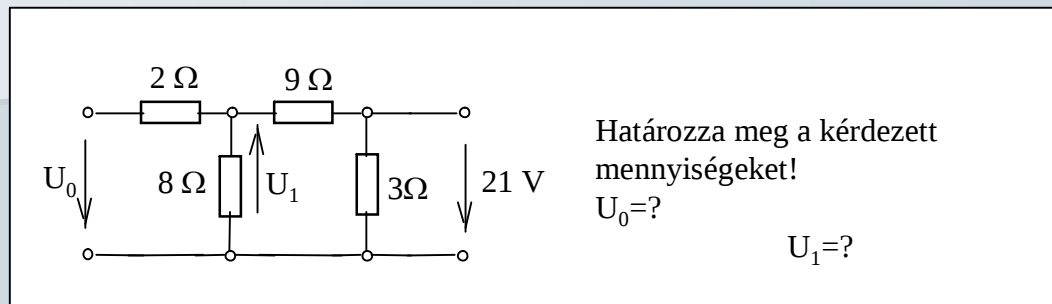
A villamos mérés technika egyik leggyakrabban alkalmazott mérőáramköre. Két párhuzamosan kapcsolt feszültségosztóból áll. Ha a kimeneti feszültség nulla, **kiegyenlített híd**ről beszélünk. Ez akkor áll fenn, ha A és B pont azonos potenciálon van, vagyis mindkét feszültségosztó azonos mértékben osztja le U_{be} bemeneti feszültséget:

$$\frac{U_1}{U_A} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{U_3}{U_B} = \frac{R_3}{R_4}$$

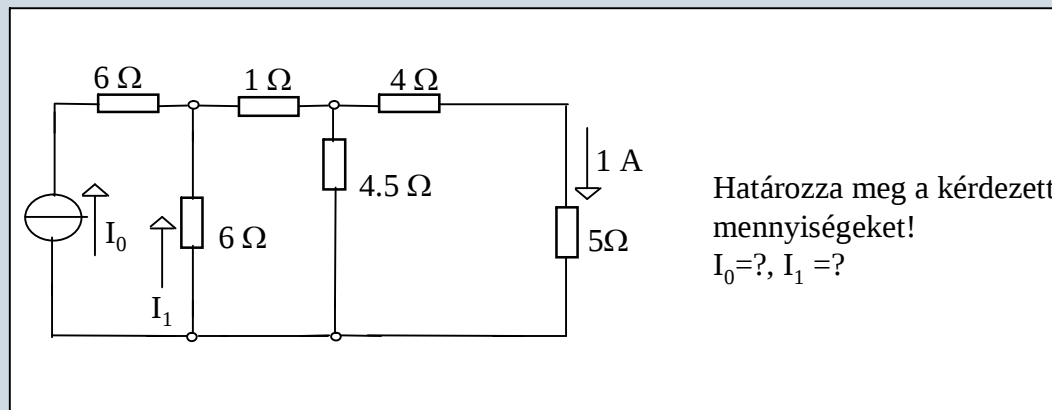
$$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$$

Példák a feszültség- és áramosztó összefüggések használatára

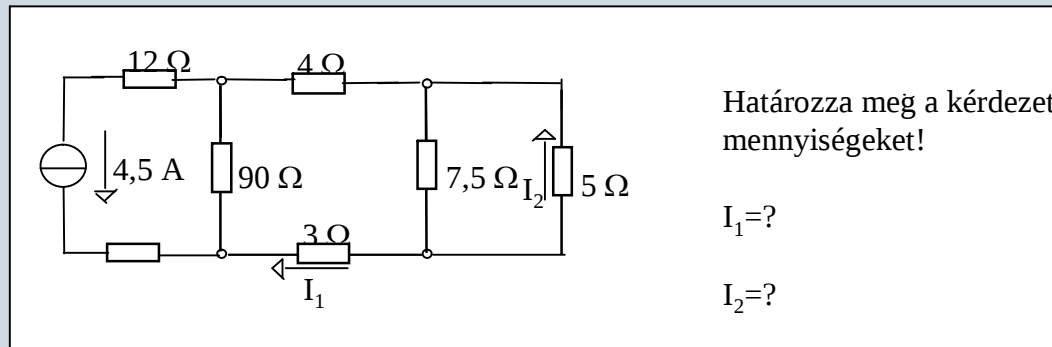
1.



2.



3.

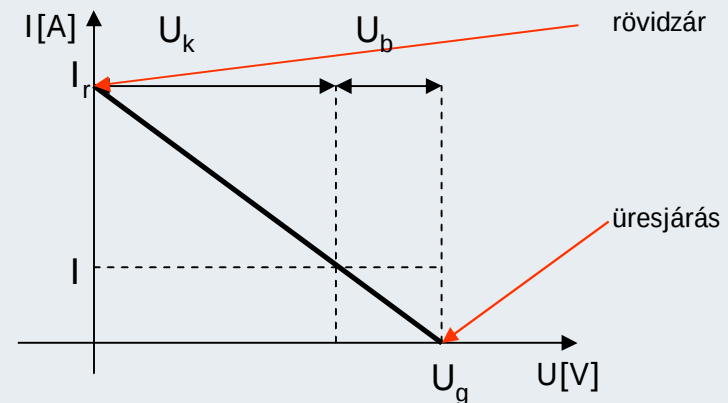
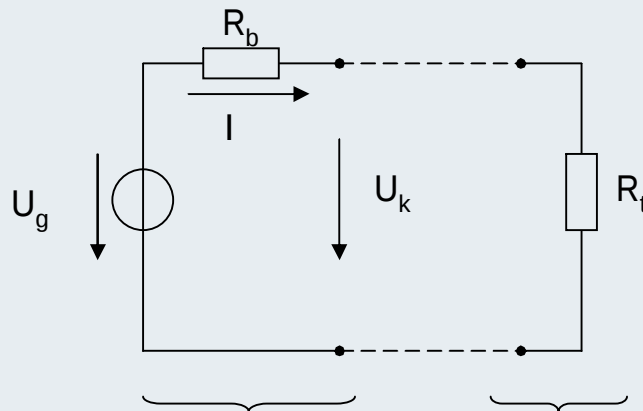


Aktív hálózatok

Az ideális és a valóságos feszültséggenerátor

A **feszültséggenerátorok** kapcsain mérhető U_k kapocsfeszültség mindig kisebb, mint a generátor U_g forrásfeszültsége, ha a terhelőárm $I > 0$. A feszültséggenerátorokban fellépő veszteségeket R_b belső ellenállással vesszük figyelembe. Így a valóságos feszültséggenerátorokat elvileg két részre oszthatjuk:

- U_g forrásfeszültségű és $R_b = 0$ belső ellenállású *ideális feszültséggenerátorra* és
- a működésből adódó belső veszteségeket figyelembe vevő R_b *belső ellenállással*.



U-I jelleggörbe

$$U_k = U_g - I \cdot R_b = U_g - \frac{U_g}{R_b + R_t} = U - \frac{U}{1 + \frac{R_t}{R_b}}$$

Ha $R_b \ll R_t$, akkor U_k gyakorlatilag nem függ R_t -től.

Az ideális és a valóságos áramgenerátor

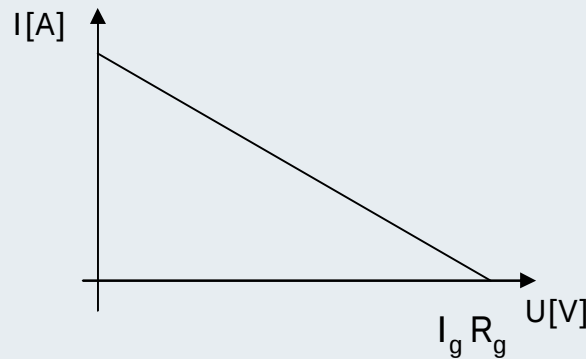
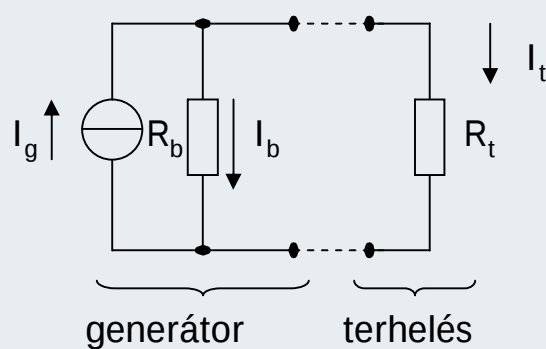
$$I = \frac{U_g}{R_t + R_b}$$



Ha $R_b \gg R_t$, akkor R_t változása nem befolyásolja lényegesen I értékét, a generátor *áramgenerátor*ként működik.

A valóságos áramgenerátorokat is elvileg két részre oszthatjuk:

- egy $R_b = \infty$ belső ellenállású *ideális áramgenerátorra* (áramforrásra)
- és egy vele *párhuzamosan* kapcsolt R_b *belső ellenállásra*.



$$I_g - I_t - I_b = 0$$

$$I_g = I_t + I_b$$

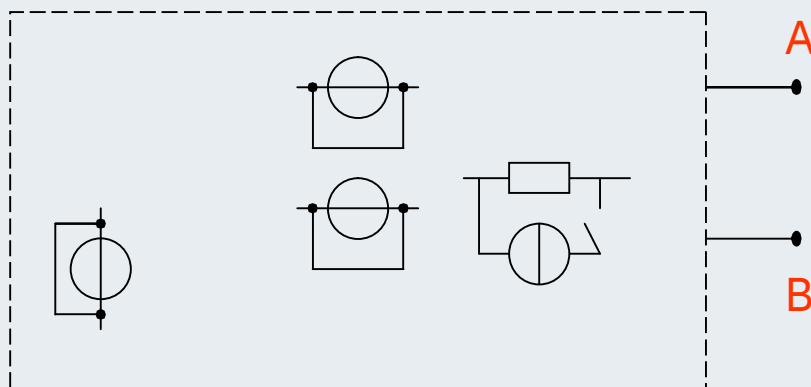
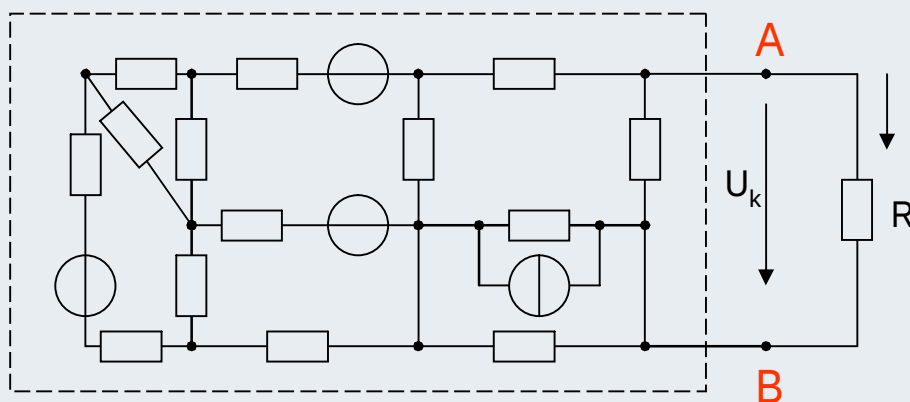
$$I_g = I_t + \frac{U}{R_b}$$

$$I_t = I = I_g - \frac{U}{R_b}$$

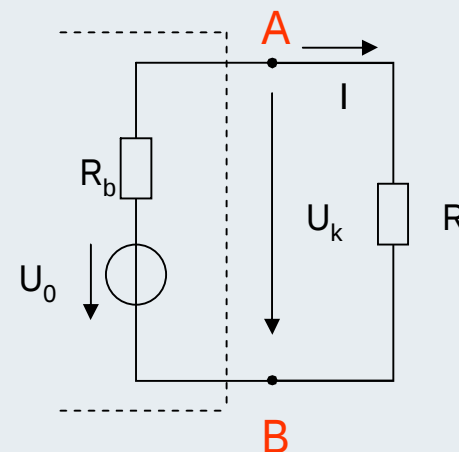
Thevenin-tétel

Bármely hálózat két tetszőleges pontja felől nézve **helyettesíthető egyetlen feszültségforrással**. A helyettesítő feszültségforrást akkor ismerjük, ha meg tudjuk határozni a feszültséggenerátor U_g forrásfeszültségét és a vele sorba kapcsolt R_b belső ellenállást (impedanciát).

A forrásfeszültség meghatározása:



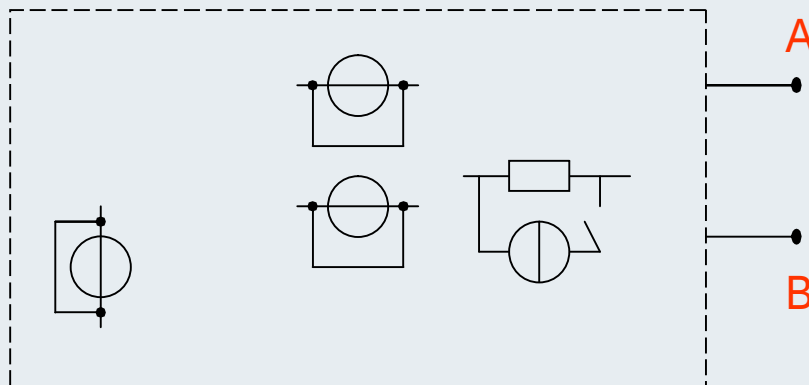
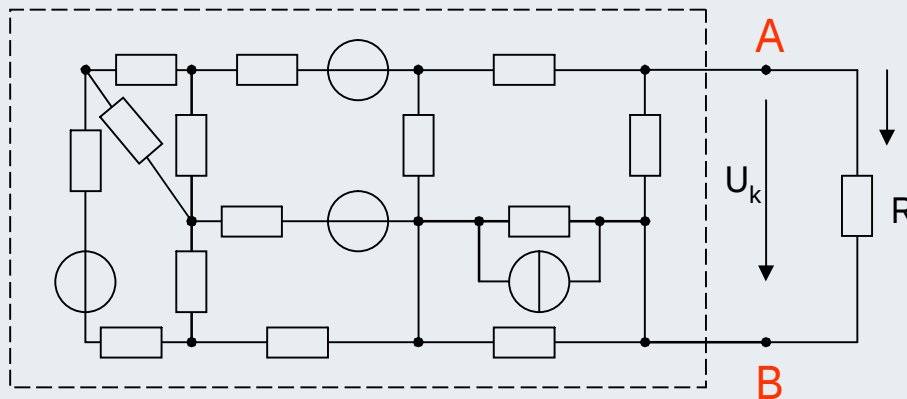
A belső impedancia meghatározása (a feszültségforrások rövidre zárva, áramgenerátorok köre megszakítva)



Thevenin helyettesítő kép

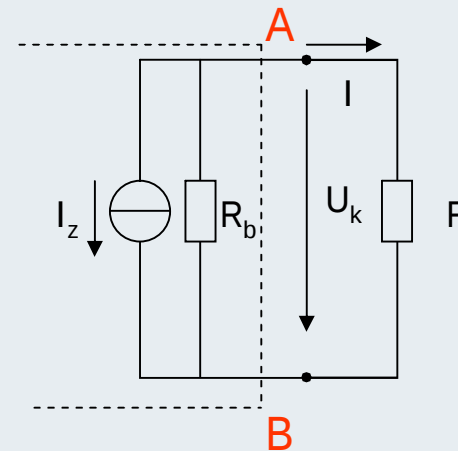
Norton-tétel

Bármely hálózat két tetszőleges pontja felől nézve **helyettesíthető egyetlen áramforrással**. A helyettesítő áramforrást akkor ismerjük, ha meg tudjuk határozni az áramgenerátor I_z forrásáramát és a vele párhuzamosan kapcsolt R_b belső ellenállást (impedanciát).



A belső impedancia meghatározása (a feszültségforrások rövidre zárva, áramgenerátorok köre megszakítva)

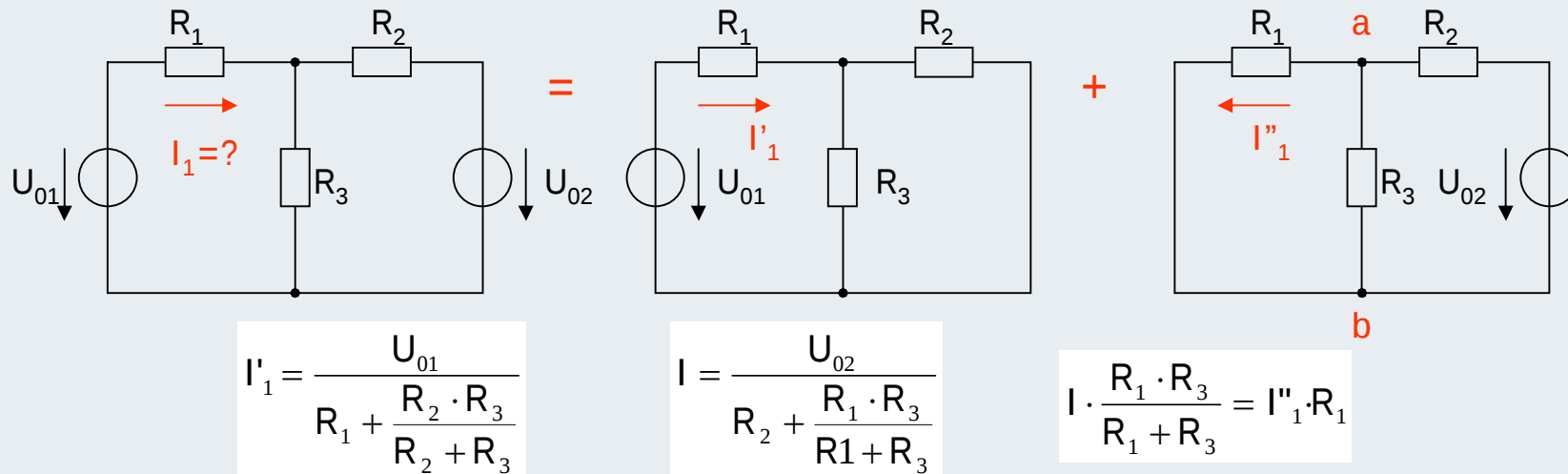
A forrásáram meghatározása:



Norton helyettesítő kép

Szuperpozíció-tétel

Generátorokból és *lineáris* impedanciákból álló hálózat bármely ágának árama egyenlő azoknak az áramoknak az összegével, amelyet egy-egy generátor hozna létre, ha a vizsgálat idejére a többi feszültséggenerátort rövidre zárnánk, az áramgenerátorok áramát pedig megszakítanánk. Vagyis a tényleges áramot az egyes generátorok által létrehozott áramok **összege** (szuperpozíciója) adja.



$$I''_1 = \frac{R_3}{R_1 + R_3} \cdot I$$

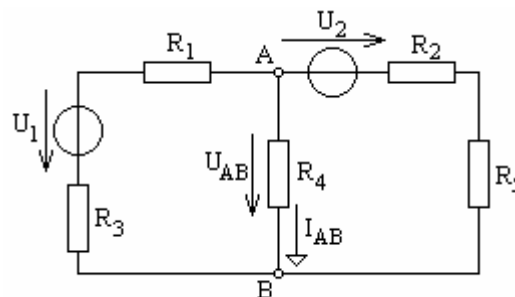
$$I'_1 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \cdot I$$

$$I_1 = I'_1 - I''_1$$

Példák a szuperpozíció-tétel használatára

1.

Határozza meg az ábrán látható hálózat R_4 ellenállásának áramát és feszültségét a szuperpozíció elvének felhasználásával!



$$U_1 = 120 \text{ V}$$

$$U_2 = 90 \text{ V}$$

$$R_1 = 20$$

$$R_2 = 10$$

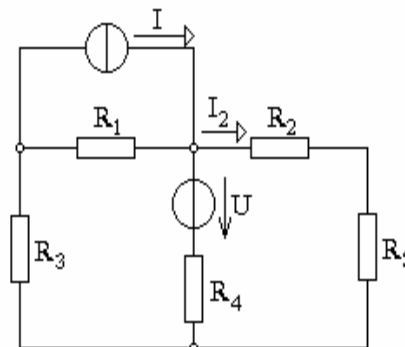
$$R_3 = 30$$

$$R_4 = 50$$

$$R_5 = 40$$

2.

Számítsa ki az alábbi áramkör I_2 áramát a szuperpozíció elv segítségével!



$$U = 100 \text{ V}$$

$$I = 5 \text{ A}$$

$$R_1 = 30$$

$$R_2 = 4$$

$$R_3 = 10$$

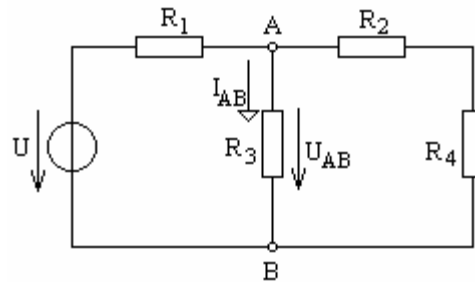
$$R_4 = 30$$

$$R_5 = 6$$

Példák a Norton és a Thevenin tétel használatára

1.

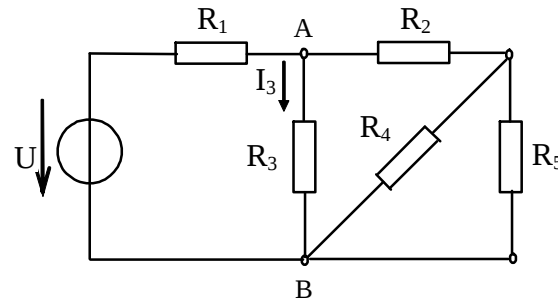
Határozza meg az ábrán látható hálózat A -B ágára vonatkozó Thevenin/Norton helyettesítő képet, majd ez alapján számítsa ki az R_3 ellenállás áramát és feszültségét!



$$\begin{aligned}U &= 50 \text{ V} \\R_1 &= 30 \, \Omega \\R_2 &= 20 \, \Omega \\R_3 &= 30 \, \Omega \\R_4 &= 40 \, \Omega\end{aligned}$$

2.

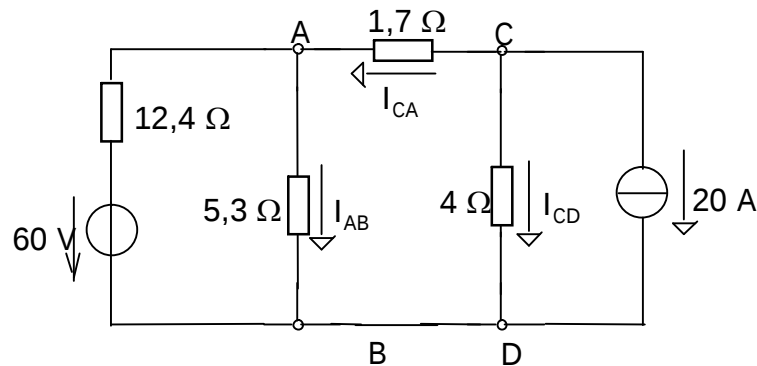
Alkossa meg az ábrán látható hálózat A-B pontokra vonatkozó Thevenin/Norton helyettesítő képét, majd ennek segítségével határozza meg a bejelölt I_3 áramot!



$$\begin{aligned}U &= 120 \text{ V} \\R_1 &= 20 \, \Omega \\R_2 &= 14 \, \Omega \\R_3 &= 20 \, \Omega \\R_4 &= 10 \, \Omega \\R_5 &= 15 \, \Omega\end{aligned}$$

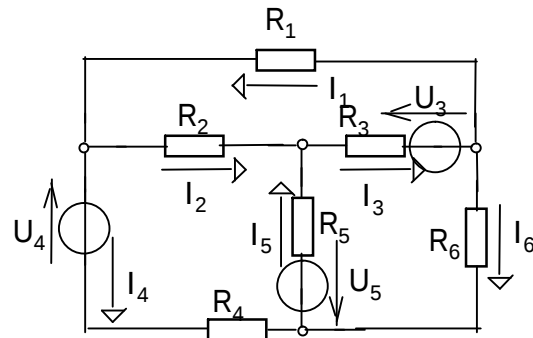
Példák a hurokáramok módszerének használatára

1.



Határozza meg az ábrán látható kapcsolás AB ágának áramát és feszültségét! Használja a hurokáramok módszerét.

2.



Számítsa ki a hálózat áramait a hurokáramok módszerével!

$R_1=100\ \Omega$, $R_2=50\ \Omega$, $R_3=100\ \Omega$, $R_4=100\ \Omega$
 $R_5=40\ \Omega$, $R_6=160\ \Omega$, $U_3=200\ \text{V}$, $U_4=100\ \text{V}$
 $U_5=100\ \text{V}$